

XXIX Olimpiada Matemática de la Región de Murcia

2.º de ESO. FASE REGIONAL

NOTA: Por favor, RELLENA ESTA HOJA CON LETRAS MAYÚSCULAS y **no pongas nada en la casilla Nº.**

| | |
|------------------------------------|--|
| Apellidos: | |
| Nombre: | |
| Centro de origen: | |
| Localidad: | |
| Sede de la prueba ⁽¹⁾ : | |

⁽¹⁾ Cartagena, Lorca, Mula, Murcia o Yecla

RECUERDA LAS INSTRUCCIONES:

No pongas el nombre ni ningún otro dato personal en ninguna de las hojas de la prueba.

No escribas nada en ninguno de los recuadros que hay en cada una de las hojas arriba a la derecha.

Cada problema se hace en su hoja y si te falta sitio, pides un folio que se grapará al examen detrás de la hoja del problema.

No se entregarán hojas para escribir en sucio. Para ello, puedes usar la propia hoja del problema y si te falta sitio después, pedir otra hoja que se añade, tal como figura en el punto anterior. Puedes tachar lo que quieras.

Sólo se puede tener sobre la mesa bolígrafos o lápices, borrador si quieres y la prueba, que en ningún caso se puede desgrapar. Calculadora NO, puesto que no todos la tienen.

Hay que explicar lo que se hace dando razones, de cualquier forma que se sepa o se pueda explicar. Presta atención a los enunciados de los problemas, en algunos se exige explicar las respuestas.

Si tienes alguna duda no la preguntes en voz alta. Antes lee el enunciado de nuevo con atención. Seguro que lo entiendes mejor.

Cuando hayas entregado la prueba has de buscar a tus profesores o acompañantes. En la cafetería podrás canjear el vale que te damos por un desayuno.

Y ANTE TODO, disfruta este tiempo que pasas pensando cómo resolver los problemas propuestos. Ten en cuenta que un concurso como éste, con problemas no previstos, no es como un examen habitual. Puedes desempeñar un papel muy bueno, aunque no resuelvas todos los problemas correctamente. En cada problema cuenta lo que hagas y cómo lo hagas, aunque no hayas completado la solución de un apartado o te falten algunos apartados por contestar.

¡ÁNIMO Y BUENA SUERTE!

PROBLEMA 1

La fase Regional de la XXIX edición de la Olimpiada Matemática de la Región de Murcia se celebra en un recinto perteneciente al castillo de Lorca.

En la imagen aparece la Torre del Homenaje de dicho castillo, también llamada Torre Alfonsina, ya que fue mandada construir en el siglo XIII por el rey Alfonso X el Sabio tras la conquista de la ciudad.



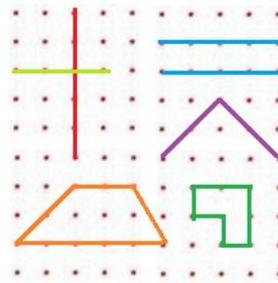
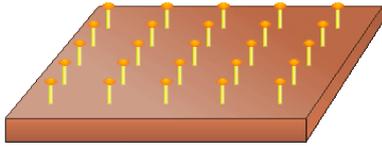
La torre tiene planta rectangular, cuyas dimensiones exteriores son 22,60 m por 19,55 m y una altura de 30 m.

Sabiendo que los muros (fabricados en piedra) tienen un espesor de 4 m y que el interior está dividido en 3 plantas con 8 m de altura cada una, te pedimos:

- La superficie del suelo de la planta baja (del interior).
 - El grosor de la capa que sirve de techo de cada una de las tres plantas.
 - El volumen de piedra utilizado en la construcción de los muros de la torre.
- RECUERDA: para calcular el volumen de un prisma se multiplica el área de la base por la altura.

PROBLEMA 2

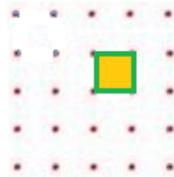
El **geoplano** es un recurso didáctico que sirve para introducir conceptos geométricos de forma manipulativa. Fue creado por el matemático egipcio Caleb Gattegno sobre 1960. Consiste en un tablero, en donde hay dibujada una malla cuadrada, y unos clavos que están situados en los nudos de la malla. Con “gomas elásticas”, apoyándonos en los clavos podemos formar una gran variedad de figuras o elementos geométricos.



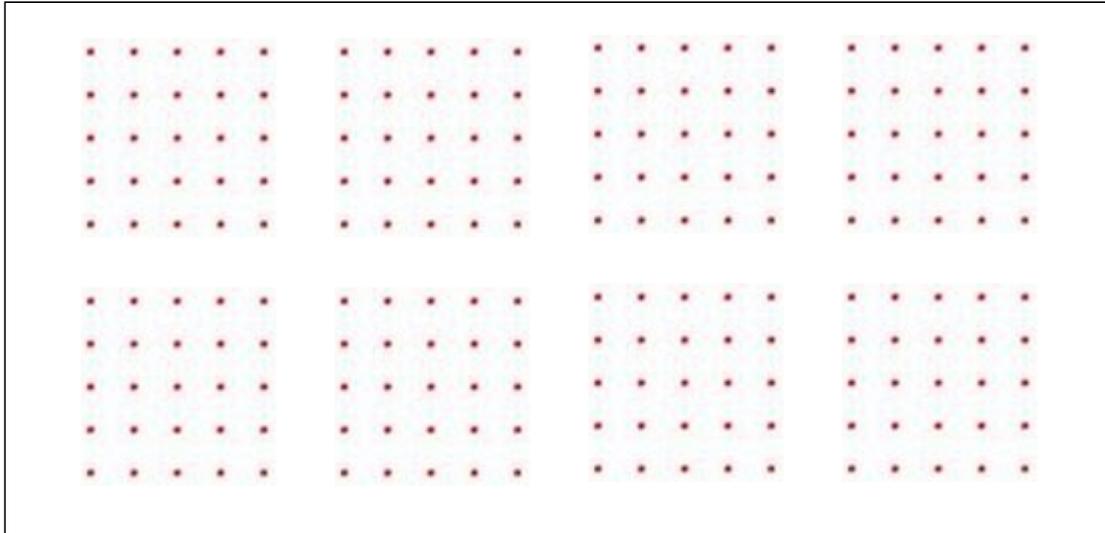
Apartado A

Las mallas que tienes abajo reproducen geoplanos de 5x5. En ellas tienes que representar cuadrados.

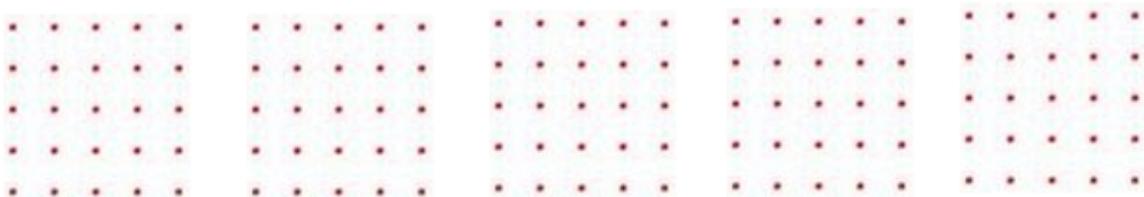
- a) Dibuja en cada geoplano **un cuadrado** de **DISTINTO TAMAÑO**.
Importante: los vértices tienen que coincidir con puntitos de la malla.
 Ejemplo:

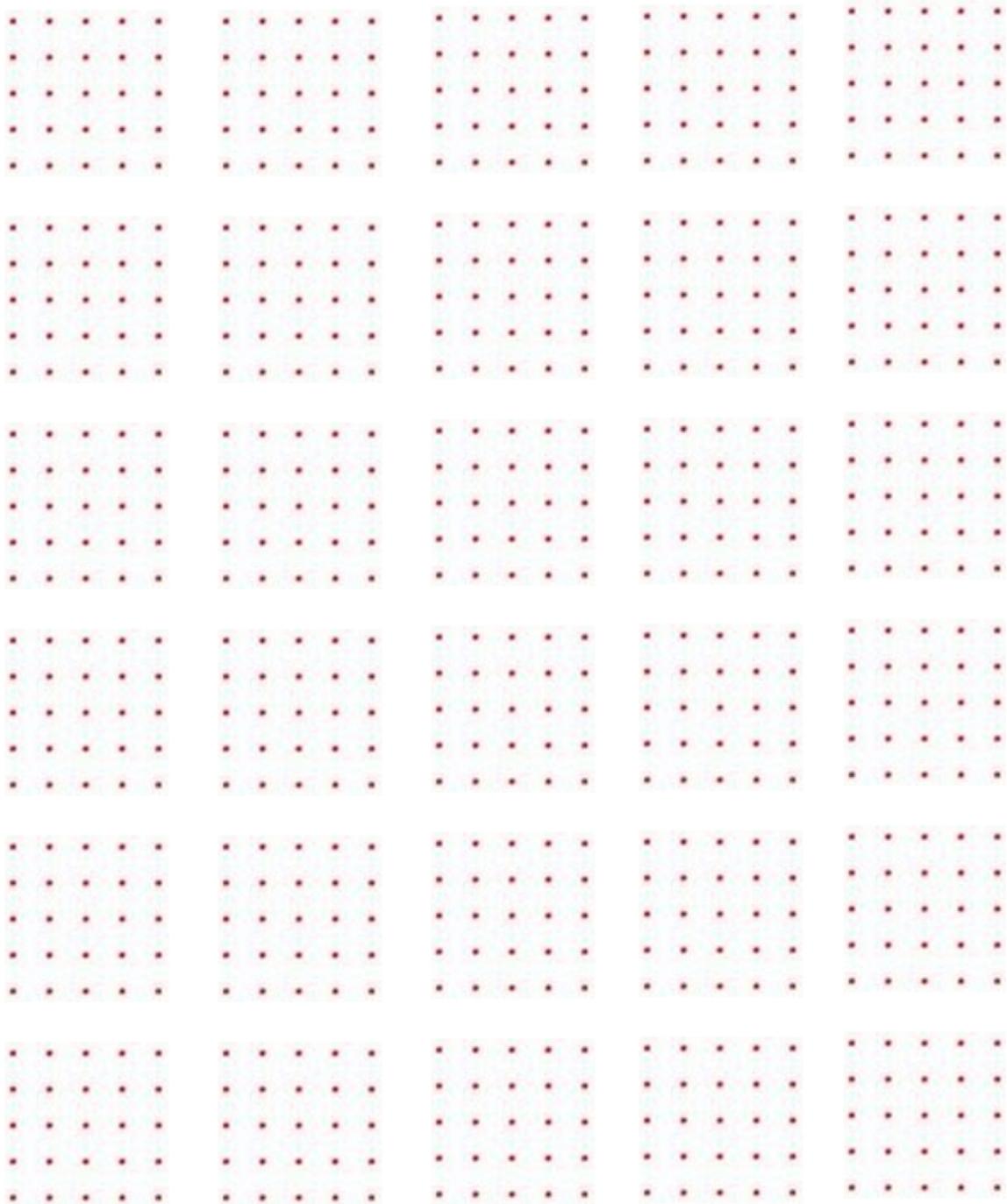


Practica en el folio que te damos aparte. **Aquí dibuja solo las soluciones:**

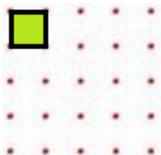


Para practicar



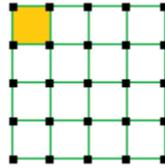


- b) Calcula el área de cada uno de los cuadrados que has dibujado, tomando como unidad de superficie el cuadradito sombreado:



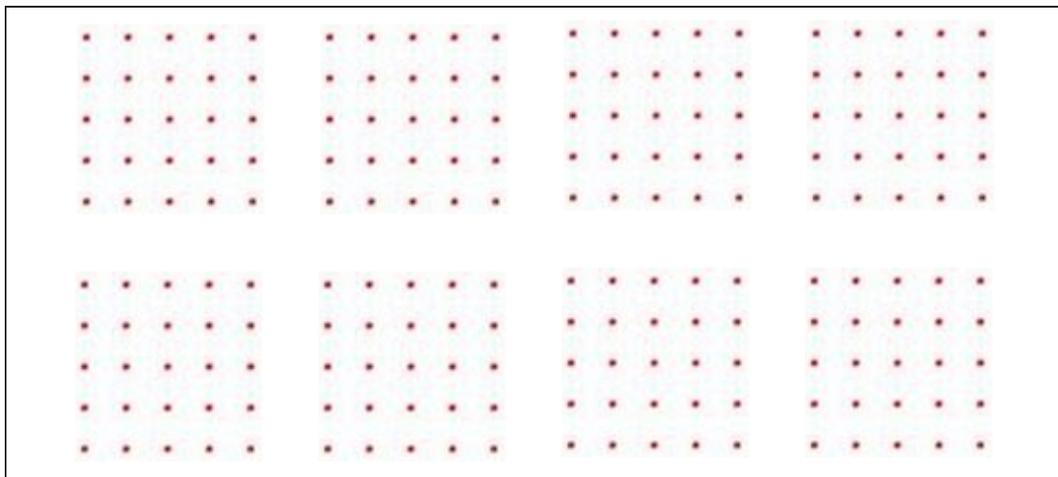
- c) Te proponemos ahora que **escribas en la tabla de abajo** cuántos **cuadrados iguales** a los que has dibujado en la solución de la cuestión a) puedes trazar en cada geoplano. Ejemplo: si el cuadrado dibujado tiene de área una unidad, en el

mismo geoplano podemos obtener o dibujar 16 cuadrados. (No es necesario que los dibujes como hemos hecho en el ejemplo, solamente decir cuántos hay).



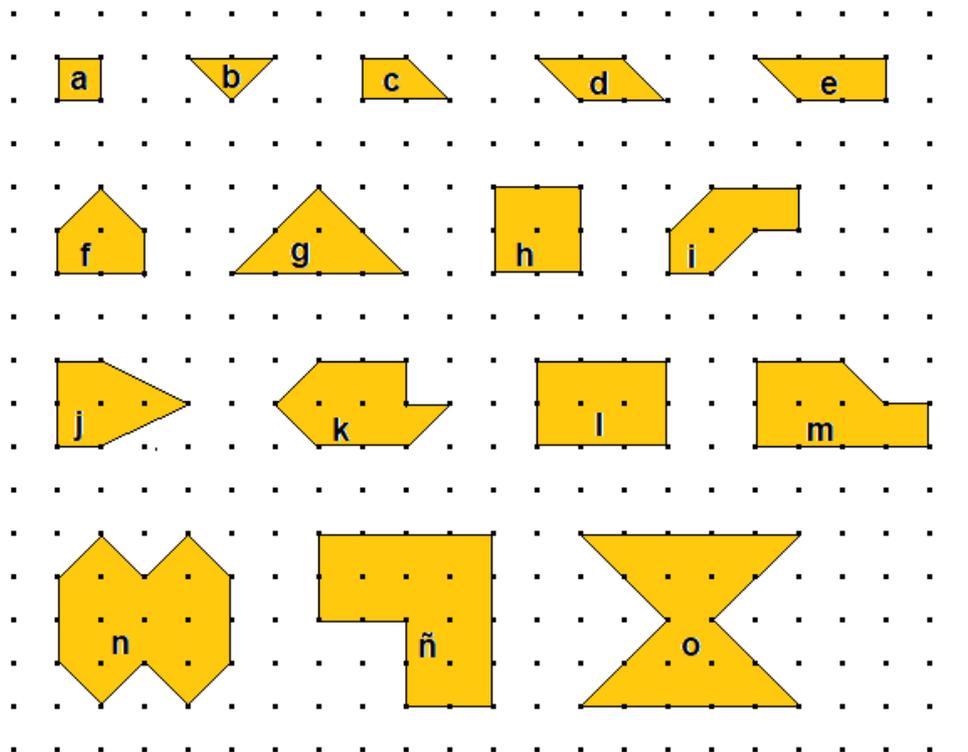
| Si el área del cuadrado es | Podemos obtener: |
|----------------------------|------------------|
| 1 unidad | 16 cuadrados |
| | |
| | |
| | |
| | |
| | |
| | |
| | |

- d) Dibuja todos los cuadrados de área 5 unidades que se pueden obtener en uno de estos geoplanos.
 Para que no haya confusiones traza cada cuadrado en un geoplano distinto.
Tienes que tener en cuenta que cuadrados del mismo tamaño, pueden tener distinta posición.



Apartado B

Observa los siguientes polígonos:



a) Los polígonos dibujados tienen un determinado número de puntos en su contorno, así como algunos de ellos en su interior. Completa la siguiente tabla:

| Polígonos | N.º puntos en el contorno | N.º de puntos en el interior | Superficie |
|-----------|---------------------------|------------------------------|------------|
| a | 4 | 0 | 1 |
| b | | | |
| c | | | |
| d | | | |
| e | 7 | 0 | 2,5 |
| f | | | |
| g | | | |
| h | | | |
| i | 8 | 1 | 4 |
| j | | | |
| k | | | |
| l | 10 | 2 | 6 |
| m | | | |
| n | | | |
| ñ | | | |
| o | | | |

b) Observa los resultados obtenidos en la tabla anterior y contesta:

- Si dos polígonos tienen el mismo número de puntos en el contorno y también el mismo número en el interior ¿tienen la misma área? Escribe algún ejemplo.

- ¿Cómo tiene que ser el número de puntos del contorno (par o impar) para que el área del polígono sea un número entero?
 - Existe una relación entre el área de un polígono y el número de puntos de la malla que tiene en su contorno (c) y en su interior (d). Esta relación se puede plasmar en una fórmula, que debes descubrir o, al menos, explicarla a tu manera.
- c) ¿El área de un paralelogramo cuyos vértices sean puntos de la malla ha de ser siempre un número entero? Justifica la respuesta.

PROBLEMA 3

El departamento de Marketing de una empresa de zumos, antes de hacer una gran producción, quiere averiguar si el tipo de envase influye cuando se compra el zumo. Para ello, fabrica dos clases:

Zumo A (70% mango, 30% fresa) y **Zumo B** (50% mango y 50% fresa) presentando ambos tipos en dos envases diferentes: **crystal** y **tetrabrik**.

Prueban estos zumos una muestra de 25 personas que no saben qué tipo de zumo hay en cada envase. Creen que se trata de cuatro zumos diferentes, desconociendo que el zumo A en tetrabrik es idéntico al zumo A en envase de cristal y lo mismo respecto del zumo B. Una vez que los ha probado, cada una de ellas tiene que rellenar una tarjeta para indicar su opinión sobre ellos. Te ponemos un ejemplo:

| Tarjeta 1 | Muy malo | Malo | Regular | Bueno | Muy rico |
|--|----------|------|---------|-------|----------|
| Cristal A | | | X | | |
| Cristal B | | | | | X |
| Tetrabrik A | X | | | | |
| Tetrabrik B | | | | | X |
| Esta tarjeta cumple lo que se pide en la cuestión: | | | | | a b |

Observando esta tarjeta se sabe que a la persona que ha contestado le parece regular el zumo A en envase de cristal, el B en el mismo envase le parece muy rico; encuentra muy malo el zumo A en tetrabrik y muy rico el zumo B en envase tetrabrik

En dos hojas separadas tienes 24 tarjetas, que junto con esta de arriba, recogen la opinión de las **25 personas encuestadas**.

Para facilitarte el conteo que has de hacer a la hora de responder las cuestiones que te pedimos, hemos incluido en la parte inferior de cada tarjeta una fila en donde debes remarcar, con un trazo grueso, la o las letras correspondientes a la cuestión cuyas condiciones cumple. A título de ejemplo te hemos cumplimentado las tarjetas 1 y 2.

A partir de la información obtenida de las tarjetas 1 a 25, responde a las preguntas siguientes:

Apartado A

- a) ¿A qué porcentaje de las personas encuestadas les gusta estrictamente más (no igual, sino más) el zumo **A en Cristal** que el zumo **A en Tetrabrik**?
- a) ¿A qué porcentaje de las personas encuestadas les gusta estrictamente más (no igual, sino más) el zumo **B en Cristal** que el zumo **B en Tetrabrik**?

Apartado B

Hemos asignado las siguientes puntuaciones a la valoración que las personas encuestadas le dan a los distintos zumos y envases, con el fin de responder a las cuestiones que siguen:

| Muy malo | Malo | Regular | Bueno | Muy Rico |
|----------|------|---------|-------|----------|
| 0 | 1 | 2 | 3 | 4 |

- a) En general, ¿qué zumo tiene más aceptación, independientemente del tipo de envase, A o B?
- b) Supón que tú fueras el consultor al que la empresa de zumos ha encargado la encuesta y su análisis. Si la empresa, para que no se disparen los costes de producción, solo puede fabricar en cristal uno de los tipos de zumo, ¿cuál de los dos zumos recomendarías que se hiciera en cristal en vez de en tetrabrik?

Debes explicar al director general las razones por las que recomiendas esa opción.

TARJETAS

| Tarjeta 2 | Muy malo | Malo | Regular | Bueno | Muy rico |
|--|----------|------|---------|-------|----------|
| Cristal A | | | | X | |
| Cristal B | | | X | | |
| Tetrabrik A | | | | | X |
| Tetrabrik B | | X | | | |
| Esta tarjeta cumple lo que se pide en la cuestión: | | | | | a b |

| Tarjeta 3 | Muy malo | Malo | Regular | Bueno | Muy rico |
|--|----------|------|---------|-------|----------|
| Cristal A | | | X | | |
| Cristal B | | | | X | |
| Tetrabrik A | | X | | | |
| Tetrabrik B | X | | | | |
| Esta tarjeta cumple lo que se pide en la cuestión: | | | | | a b |

| Tarjeta 4 | Muy malo | Malo | Regular | Bueno | Muy rico |
|--|----------|------|---------|-------|----------|
| Cristal A | | | X | | |
| Cristal B | | | | X | |
| Tetrabrik A | X | | | | |
| Tetrabrik B | | | | | X |
| Esta tarjeta cumple lo que se pide en la cuestión: | | | | | a b |

| Tarjeta 5 | Muy malo | Malo | Regular | Bueno | Muy rico |
|--|----------|------|---------|-------|----------|
| Cristal A | | | | | X |
| Cristal B | | | | X | |
| Tetrabrik A | | | | X | |
| Tetrabrik B | | | X | | |
| Esta tarjeta cumple lo que se pide en la cuestión: | | | | | a b |

| | | | | | |
|---------|-----|------|---------|-------|-----|
| Tarjeta | Muy | Malo | Regular | Bueno | Muy |
|---------|-----|------|---------|-------|-----|

| | | | | | |
|---------|-----|------|---------|-------|-----|
| Tarjeta | Muy | Malo | Regular | Bueno | Muy |
|---------|-----|------|---------|-------|-----|

| | | | | | | |
|--|------|---|---|---|------|---|
| 6 | malo | | | | rico | |
| Cristal A | | | | X | | |
| Cristal B | | | | | X | |
| Tetrabrik A | | | X | | | |
| Tetrabrik B | | X | | | | |
| Esta tarjeta cumple lo que se pide en la cuestión: | | | | | a | b |

| | | | | | | |
|--|------|--|---|---|------|---|
| 7 | malo | | | | rico | |
| Cristal A | | | | X | | |
| Cristal B | | | X | | | |
| Tetrabrik A | | | | | X | |
| Tetrabrik B | | | | X | | |
| Esta tarjeta cumple lo que se pide en la cuestión: | | | | | a | b |

| | | | | | | |
|--|----------|------|---------|-------|----------|---|
| Tarjeta 8 | Muy malo | Malo | Regular | Bueno | Muy rico | |
| Cristal A | | | X | | | |
| Cristal B | | X | | | | |
| Tetrabrik A | | X | | | | |
| Tetrabrik B | X | | | | | |
| Esta tarjeta cumple lo que se pide en la cuestión: | | | | | a | b |

| | | | | | | |
|--|----------|------|---------|-------|----------|---|
| Tarjeta 9 | Muy malo | Malo | Regular | Bueno | Muy rico | |
| Cristal A | | X | | | | |
| Cristal B | X | | | | | |
| Tetrabrik A | | | | X | | |
| Tetrabrik B | | | X | | | |
| Esta tarjeta cumple lo que se pide en la cuestión: | | | | | a | b |

| | | | | | | |
|--|----------|------|---------|-------|----------|---|
| Tarjeta 10 | Muy malo | Malo | Regular | Bueno | Muy rico | |
| Cristal A | | | | X | | |
| Cristal B | | | | X | | |
| Tetrabrik A | | | | X | | |
| Tetrabrik B | | | | X | | |
| Esta tarjeta cumple lo que se pide en la cuestión: | | | | | a | b |

| | | | | | | |
|--|----------|------|---------|-------|----------|---|
| Tarjeta 11 | Muy malo | Malo | Regular | Bueno | Muy rico | |
| Cristal A | | | | | X | |
| Cristal B | | | | X | | |
| Tetrabrik A | | | | | X | |
| Tetrabrik B | | | X | | | |
| Esta tarjeta cumple lo que se pide en la cuestión: | | | | | a | b |

| | | | | | | |
|--|----------|------|---------|-------|----------|---|
| Tarjeta 12 | Muy malo | Malo | Regular | Bueno | Muy rico | |
| Cristal A | | | | X | | |
| Cristal B | | | | | X | |
| Tetrabrik A | | X | | | | |
| Tetrabrik B | X | | | | | |
| Esta tarjeta cumple lo que se pide en la cuestión: | | | | | a | b |

| | | | | | | |
|--|----------|------|---------|-------|----------|---|
| Tarjeta 13 | Muy malo | Malo | Regular | Bueno | Muy rico | |
| Cristal A | | | | | X | |
| Cristal B | | | | | X | |
| Tetrabrik A | | | X | | | |
| Tetrabrik B | X | | | | | |
| Esta tarjeta cumple lo que se pide en la cuestión: | | | | | a | b |

| | | | | | | |
|--|----------|------|---------|-------|----------|---|
| Tarjeta 14 | Muy malo | Malo | Regular | Bueno | Muy rico | |
| Cristal A | | | | X | | |
| Cristal B | | | | X | | |
| Tetrabrik A | | | | X | | |
| Tetrabrik B | | | | | X | |
| Esta tarjeta cumple lo que se pide en la cuestión: | | | | | a | b |

| | | | | | | |
|--|----------|------|---------|-------|----------|---|
| Tarjeta 15 | Muy malo | Malo | Regular | Bueno | Muy rico | |
| Cristal A | | | | | X | |
| Cristal B | | | | X | | |
| Tetrabrik A | | | X | | | |
| Tetrabrik B | | | | X | | |
| Esta tarjeta cumple lo que se pide en la cuestión: | | | | | a | b |

| | | | | | | |
|--|----------|------|---------|-------|----------|---|
| Tarjeta 16 | Muy malo | Malo | Regular | Bueno | Muy rico | |
| Cristal A | | | | X | | |
| Cristal B | | | X | | | |
| Tetrabrik A | | | X | | | |
| Tetrabrik B | | | | X | | |
| Esta tarjeta cumple lo que se pide en la cuestión: | | | | | a | b |

| | | | | | | |
|--|----------|------|---------|-------|----------|---|
| Tarjeta 17 | Muy malo | Malo | Regular | Bueno | Muy rico | |
| Cristal A | | | | | X | |
| Cristal B | | X | | | | |
| Tetrabrik A | | | | X | | |
| Tetrabrik B | | X | | | | |
| Esta tarjeta cumple lo que se pide en la cuestión: | | | | | a | b |

| | | | | | |
|-------------------|----------|------|---------|-------|----------|
| Tarjeta 18 | Muy malo | Malo | Regular | Bueno | Muy rico |
|-------------------|----------|------|---------|-------|----------|

| | | | | | |
|-------------------|----------|------|---------|-------|----------|
| Tarjeta 19 | Muy malo | Malo | Regular | Bueno | Muy rico |
|-------------------|----------|------|---------|-------|----------|

| | | | | | |
|--|--|--|---|---|-------|
| Cristal A | | | | X | |
| Cristal B | | | | X | |
| Tetrabrik A | | | X | | |
| Tetrabrik B | | | | X | |
| Esta tarjeta cumple lo que se pide en la cuestión: | | | | | a b |

| | | | | | |
|--|--|---|--|---|-------|
| Cristal A | | | | | X |
| Cristal B | | | | X | |
| Tetrabrik A | | | | | X |
| Tetrabrik B | | X | | | |
| Esta tarjeta cumple lo que se pide en la cuestión: | | | | | a b |

| Tarjeta 20 | Muy malo | Malo | Regular | Bueno | Muy rico |
|--|----------|------|---------|-------|----------|
| Cristal A | | | | | X |
| Cristal B | | | X | | |
| Tetrabrik A | | | | X | |
| Tetrabrik B | X | | | | |
| Esta tarjeta cumple lo que se pide en la cuestión: | | | | | a b |

| Tarjeta 21 | Muy malo | Malo | Regular | Bueno | Muy rico |
|--|----------|------|---------|-------|----------|
| Cristal A | | | | | X |
| Cristal B | | | | | X |
| Tetrabrik A | | | X | | |
| Tetrabrik B | | | X | | |
| Esta tarjeta cumple lo que se pide en la cuestión: | | | | | a b |

| Tarjeta 22 | Muy malo | Malo | Regular | Bueno | Muy rico |
|--|----------|------|---------|-------|----------|
| Cristal A | | | | X | |
| Cristal B | | | | | X |
| Tetrabrik A | | | X | | |
| Tetrabrik B | | X | | | |
| Esta tarjeta cumple lo que se pide en la cuestión: | | | | | a b |

| Tarjeta 23 | Muy malo | Malo | Regular | Bueno | Muy rico |
|--|----------|------|---------|-------|----------|
| Cristal A | | | | | X |
| Cristal B | | | X | | |
| Tetrabrik A | | | | X | |
| Tetrabrik B | | | | | X |
| Esta tarjeta cumple lo que se pide en la cuestión: | | | | | a b |

| Tarjeta 24 | Muy malo | Malo | Regular | Bueno | Muy rico |
|--|----------|------|---------|-------|----------|
| Cristal A | | | | X | |
| Cristal B | | | | | X |
| Tetrabrik A | | | X | | |
| Tetrabrik B | | X | | | |
| Esta tarjeta cumple lo que se pide en la cuestión: | | | | | a b |

| Tarjeta 25 | Muy malo | Malo | Regular | Bueno | Muy rico |
|--|----------|------|---------|-------|----------|
| Cristal A | | | | | X |
| Cristal B | | | | | X |
| Tetrabrik A | | | X | | |
| Tetrabrik B | X | | | | |
| Esta tarjeta cumple lo que se pide en la cuestión: | | | | | a b |

PROBLEMA 4

Apartado A

En el siguiente ejemplo te mostramos un algoritmo para hacer restas con llevadas (distinto del habitual) para el que solo necesitas saber restar sin llevadas y sumar:

$$537 - 378$$

$$\begin{array}{r} 999 \\ - 378 \\ \hline 621 \end{array} \quad \begin{array}{r} 621 \\ + 537 \\ \hline \textcircled{1}158 \end{array}$$

Ahora el 1 de la izquierda se pasa a la derecha y se le suma al 8

Resultado: 159

a) Realiza las siguientes operaciones, usando ese mismo algoritmo:

$$81 - 27$$

$$3405 - 646$$

b) Explica por qué **funciona es válido???** el algoritmo, es decir, cómo puedes estar seguro de que siempre va a funcionar bien con cualquier par de números.

Apartado B

Ahora te presentamos, divisiones con divisor 9 que se realizan con un algoritmo (distinto del que usamos para dividir habitualmente), que consiste en hacer sumas y en ocasiones una división por 9.

Ejemplo 1. 2104 : 9

| COCIENTE | | | RESTO |
|----------|---|---|-------|
| c | d | u | |
| 2 | 3 | 3 | 7 |

El cociente es 233 y el resto es 7.

Ejemplo 2. 2154 : 9

| COCIENTE | | | RESTO |
|----------|----------|----------|----------|
| c | d | u | |
| 2 | 3 | 8 | 12 |
| 2 | 3 | 9 | 3 |

El cociente es 239 y el resto es 3.

Ejemplo 3. 2573 : 9

| COCIENTE | | | RESTO |
|----------|----------|----------|----------|
| c | d | u | |
| 2 | 7 | 14 | 17 |
| 2 | 7 | 15 | 8 |
| 2 | 8 | 5 | 8 |

El cociente es 285 y el resto 8

a) Efectúa con el algoritmo anterior estas divisiones:

$$1204 : 9$$

$$237 : 9$$

$$1357 : 9$$

b) Para explicar por qué funciona este algoritmo, responde (puedes contestar usando como ejemplo alguno de los que te ponemos):

b.1 ¿Por qué dividimos entre 9, si el último número de la primera fila que obtenemos al aplicar el algoritmo, la última cifra (la columna del resto) es igual o mayor que 9? Observa los ejemplos 2 y 3 que te damos hechos.

b.2 Fíjate en el último ejemplo que te damos resuelto. Explica qué se hace para obtener el resultado final al pasar de la penúltima fila a la última. Razónalo.

b.3 Podrías explicar por qué es correcto este algoritmo para dividir por 9? Puedes explicarlo con el primer ejemplo que te damos hecho?

c) Haz esta división con el mismo algoritmo.

$$9213 : 9$$

d) OPCIONAL:

¿Puedes encontrar una manera de hacer más corto el algoritmo cuando el dividendo empieza por 9?